

# Modelado del comportamiento a pandeo de paneles y pilares esbeltos de hormigón armado

## *Modelling the buckling behaviour of slender reinforced-concrete panels and columns*

Jacinto Ruiz Carmona<sup>(1,2)</sup>, Gonzalo Ruiz López<sup>(1)</sup> y Rocío Porras Soriano<sup>(1)</sup>

Recibido | Received: 16-01-2009  
Aceptado | Accepted: 03-03-2009

### Resumen

El presente trabajo muestra un modelo desarrollado para estudiar el comportamiento frente a pandeo de paneles y pilares esbeltos de hormigón armado que flectan sobre su eje débil. El modelo reproduce la pérdida de rigidez del elemento durante el proceso de carga debido a la iniciación y progreso de fisuras en el hormigón. Esta pérdida de rigidez va a tener una gran influencia en el fallo por pandeo del elemento de hormigón. Para modelar el comportamiento del hormigón en fractura se han simplificado todos los procesos de fractura a una única fisura situada en la parte central del elemento. Las características del hormigón en fractura son descritas mediante un modelo cohesivo. El modelo se plantea en grandes desplazamientos para que en cada iteración se tenga en cuenta el cambio en la geometría. De esta forma el fallo por pandeo queda explícitamente resuelto. Hemos tratado de dar una metodología práctica y sencilla de implementar en códigos de elementos finitos comerciales. En la parte final del artículo incluimos una discusión de los resultados obtenidos, contrastando los resultados obtenidos con el modelo con resultados experimentales y analizando la sensibilidad del modelo al variar los parámetros que intervienen en el problema.

**Palabras clave:** pandeo, hormigón armado, modelo cohesivo, paneles portantes, pilares.

### Abstract

This work reports a model that predicts the behaviour of lightly reinforced concrete panels and columns when subjected to buckling. The model simulates the loss of stiffness of these structures due to the initiation and development of cracks during loading. The fracturing process was represented by considering a single crack at the centre of the panel or column. The behaviour of the concrete under traction was described by means of a cohesive model. When subjected to compression an analogous model was used: before reaching the maximum load the behaviour of the concrete was described by a stress-strain relationship, whereas a stress-displacement relationship was employed after the maximum load. The proposed model contemplates large deformations so that in each iteration the change in geometry is taken into account. In this manner, failure due to buckling is explicitly simulated. The methodology of the proposed model is simple and practical, and can be integrated into commercial finite element programs. The model was validated comparing its predictions with experimentally obtained results. The sensitivity of the model to changes in the slenderness of the panel or column, the reinforcement ratio and the characteristics of the concrete was determined.

**Keywords:** buckling reinforced concrete, cohesive model, panels, columns.

\* An extensive English language summary of the present article is provided on page 111 of this issue both for the convenience of non-Spanish-speaking readers and inclusion in databases.

- (1) E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Castilla-La Mancha (Ciudad Real, España).  
(2) Mecanismo, diseño y cálculo de estructuras, S.L. (Madrid, España)

Persona de contacto / Corresponding author: jacinto.ruiz@uclm.es

## 1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras realizadas con materiales que trabajan fundamentalmente en régimen elástico, como por ejemplo las estructuras metálicas, alcanzan su agotamiento bien cuando agotan su resistencia mecánica o bien cuando se produce un proceso de inestabilidad (pandeo). No obstante, en la mayoría de las estructuras y en particular en las de hormigón el fallo de los elementos se produce debido a una combinación entre el agotamiento del material y la inestabilidad geométrica. El desarrollo de procesos de fisuración durante el proceso de carga, con el consiguiente deterioro de la matriz de hormigón, produce cambios en la respuesta del elemento de hormigón armado. Estos procesos de fisuración van a tener una gran influencia en el proceso de pérdida de estabilidad de la estructura y en su fallo [1].

En el diseño de elementos de hormigón armado el estudio del fallo por pandeo ha sido históricamente un campo importante en la investigación [2]. En los últimos años el pandeo de elementos de hormigón armado ha sido objeto de diferentes estudios. Entre ellos podemos destacar los realizados por Bažant et al., en los que propusieron una solución analítica suponiendo una deformación de forma sinusoidal del elemento comprimido [3, 4]. Kim et al. analizaron el comportamiento de los pilares comprimidos teniendo en cuenta las no linealidades de los materiales y geométricas [5, 6]. Recientemente Yalcin y Saatcioglu han desarrollado un modelo analítico para estudiar el pandeo que consideraba la adherencia entre hormigón y acero y la formación de una zona plastificada en el centro del elemento [7]. Finalmente Kwak y Kim analizaron el efecto de la fluencia en la carga de pandeo [8–10]. Todos estos estudios han ayudado a comprender mejor el problema del pandeo en elementos de hormigón y las variables que en él intervienen. No obstante, el análisis global de un elemento teniendo en cuenta todas las propiedades mecánicas de los materiales y su interacción con la inestabilidad geométrica está todavía lejos de ser perfecto. Las formulaciones propuestas por los diferentes códigos, véase p. e. [11–13], incluyen métodos que realizan diferentes simplificaciones, las cuales dan lugar a variaciones importantes en los coeficientes de seguridad comparados con resultados experimentales. Por ello se hace necesario un análisis detallado del comportamiento del elemento estructural y una modelación de los materiales acorde al comportamiento físico de los mismos.

En el caso particular de los paneles portantes o pilares débilmente armados que flectan alrededor de su eje débil, al ser estos elementos muy esbeltos y poseer cuantías de armado relativamente bajas, los procesos de fisuración van a tener una influencia elevada en el comportamiento global del elemento. Como marco teórico para realizar el estudio vamos a utilizar teorías basadas en Mecánica de la Fractura aplicada al hormigón [14]. Precisamente la relación entre el desarrollo de los procesos de fisuración y el fallo del elemento va a permitir

que el fallo por pandeo pueda ser estudiado mediante estas teorías [15]. El estudio plantea un modelo siguiendo las directrices del método general para estudiar el estado límite de inestabilidad descritas en la EHE-08 (artículo 43.2) [16]. En el modelo vamos a tener en cuenta las no linealidades materiales (acero, hormigón y adherencia) y geométricas.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En general el fallo por pandeo de un panel o pilar esbelto sometido a esfuerzos de compresión se produce de forma frágil. Si antes de alcanzar la carga de pandeo en algún punto del panel se supera una tensión superior a la resistencia de tracción del material comienzan a desarrollarse diversos procesos de fisuración. Estas fisuras provocan una considerable pérdida de rigidez en el elemento lo que conlleva que los desplazamientos transversales aumenten y el peligro de pandeo se incrementa de forma considerable. Precisamente este riesgo de fallo por pandeo tras la iniciación de los procesos de fisuración en paneles y pilares débilmente armados es lo que nos ha conducido a estudiar detalladamente el fallo por pandeo en elementos de hormigón armado.

Los modelos realizados para estudiar el comportamiento de elementos de hormigón débilmente armados, se concentran principalmente en el caso de una fisura que atraviesa la capa de armadura y que, al abrirse, provoca el arrancamiento de las barras de armado que cosen la fisura, véanse por ejemplo las referencias [17, 18]. La mayor dificultad que encuentran estos modelos es el hecho de reproducir la propagación de la fisura a través de la armadura (al menos en los modelos bidimensionales) ya que ésta constituye una discontinuidad que impide el desarrollo de la fisura. Otro problema que se presenta es el modelado numérico de la interacción entre acero y hormigón ya que el proceso de arrancamiento produce un deterioro de la intercara hormigón-acero, llegándose incluso a producir procesos de fisuración secundarios [19]. Algunos modelos resuelven ambos problemas sustituyendo la armadura por unas fuerzas de cierre situadas a ambos lados de la fisura, cuyo valor está relacionado con la resistencia del acero y la adherencia hormigón-acero [20, 21]. Otros modelan explícitamente las barras de acero, aunque sólo tienen en cuenta los casos límite de adherencia perfecta o deslizamiento libre [22]. En el presente trabajo partimos del modelo propuesto por Ruiz, Carmona y Cendón [23], que hace posible la propagación de fisuras a través de la armadura y que permite el deterioro de la intercara acero-hormigón. La estrategia seguida consiste en superponer los dos materiales, y unirlos mediante una serie de vínculos que permitan reproducir su comportamiento conjunto [24]. El hormigón se modela de modo continuo mientras que el acero se le superpone. La unión entre ambos se realiza creando unos nudos situados en la misma posición unidos por una serie de elementos que admiten unas leyes de comportamiento no

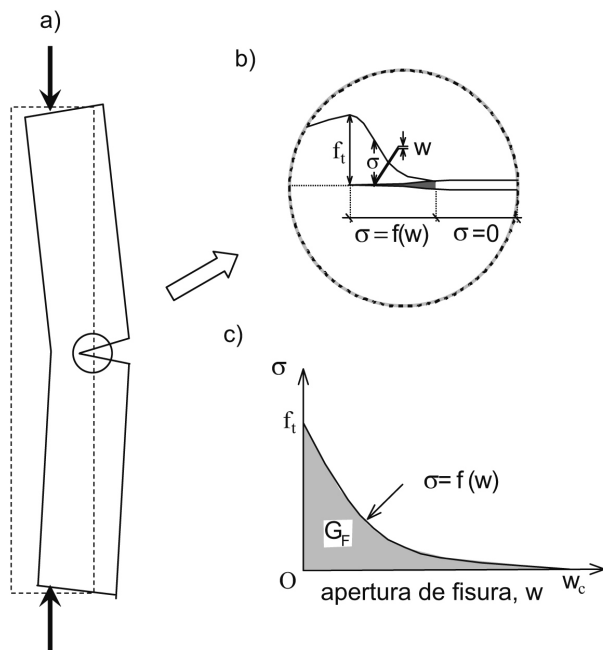


Figura 1. a) Panel sujeto a una carga excéntrica; b) Fisura cohesiva; c) Función de ablandamiento y energía de fractura.

lineal. La continuidad del hormigón permite que la fisura se pueda propagar a través del acero y que los elementos de unión acero-hormigón transmitan los esfuerzos de adherencia en función del desplazamiento relativo entre materiales. En el modelo pueden introducirse tantas líneas de armado como se quieran. Asimismo tenemos la posibilidad de variar el ancho de la sección e introducir diferentes valores de la excentricidad como ya hemos comentado. El modelo se plantea en grandes desplazamientos de forma que el problema del pandeo queda resuelto de modo explícito al tenerse en cuenta la geometría deformada del panel en cada paso de carga. El modelo va a realizarse en dos dimensiones estando el plano de pandeo contenido en el eje de simetría de la sección, véase la Figura 1a.

El modelo se resuelve con un programa de elementos finitos comercial, en este caso ANSYS. Esto permite que el modelo pueda ser resuelto por cualquier técnico con unos conocimientos básicos acerca de mecánica de fractura y teoría de estructuras. Las soluciones obtenidas

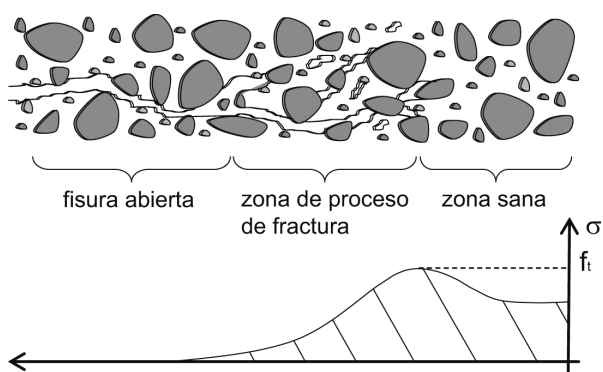


Figura 2. Zona de proceso de fractura.

son validadas con resultados experimentales consultados en la bibliografía científica.

## 2.1. Hipótesis básicas

La fractura del hormigón se representa por medio de un modelo cohesivo. Tras alcanzar la tensión de tracción máxima,  $f_t$ , la resistencia no baja a cero repentinamente, sino que comienza un proceso de decohesión en el que van a transmitirse tensiones entre los labios de la fisura. Esta idea se debe a Dugdale [25] y Barenblatt [26], aunque fue aplicada al hormigón por Hillerborg y sus colaboradores [27,28] a través del modelo de fisura ficticia también denominado de fisura cohesiva. Una fisura cohesiva se inicia cuando una de las tensiones principales alcanza en un punto el valor de la resistencia a tracción del material, véase la Figura 1b. La fisura se va a considerar perpendicular a la dirección de dicha tensión principal, lo que es conocido en fractura como Modo I. El modelo describe el proceso de decohesión desde que se alcanza la tensión máxima hasta que se abre la fisura completamente de forma discreta, véase la Figura 2. Durante ese periodo el hormigón va perdiendo su resistencia progresivamente. En Modo I estas tensiones cohesivas se pueden considerar función de la apertura de la fisura:

$$\sigma = f(w) \quad \text{siendo: } f(0) = f_t \text{ y } f(w_c) = 0 \quad (1)$$

Donde  $f(w)$  se conoce como función de ablandamiento, y es considerada como una característica del material, véase la Figura 1c. Esta función tendrá un valor nulo cuando la apertura de fisura,  $w$ , alcance un valor superior a un valor crítico,  $w_c$ . A partir de esta apertura la fisura está abierta por completo y hay una discontinuidad en el material. Cuando la fisura se va desarrollando en un punto en el material, el campo tensional de este punto recorrerá toda la curva de ablandamiento, esto implica que hasta llegar al punto definido por  $w_c$  se le ha suministrado a ese punto una energía por unidad de área igual al área encerrada por la curva de ablandamiento, véase la Figura 1c. Por tanto podemos definir que la energía necesaria para producir una fisura de superficie unidad es igual al área anteriormente citada. Esta energía se denomina energía específica de fractura,  $G_F$ . Este parámetro y la resistencia a tracción,  $f_t$ , son los que definen el comportamiento en fractura de un material. El Código Modelo (MC-90) [11] contempla la energía de fractura como un parámetro característico del hormigón en masa. Para medir este parámetro existe una recomendación RILEM [29,30]. En nuestro caso, vamos a suponer, que fuera de la zona en proceso de fractura, el material se comporta de forma elástica lineal, estando caracterizado el material por su módulo de Young,  $E_c$  y su coeficiente de Poisson,  $\nu_c$ . De esta forma se simplifica el tratamiento numérico. El error cometido lo podemos considerar de segundo orden, ya que la deformación inelástica antes de que se forme la fisura es despreciable fuera de la zona de daño si la cuantía de acero no es elevada.

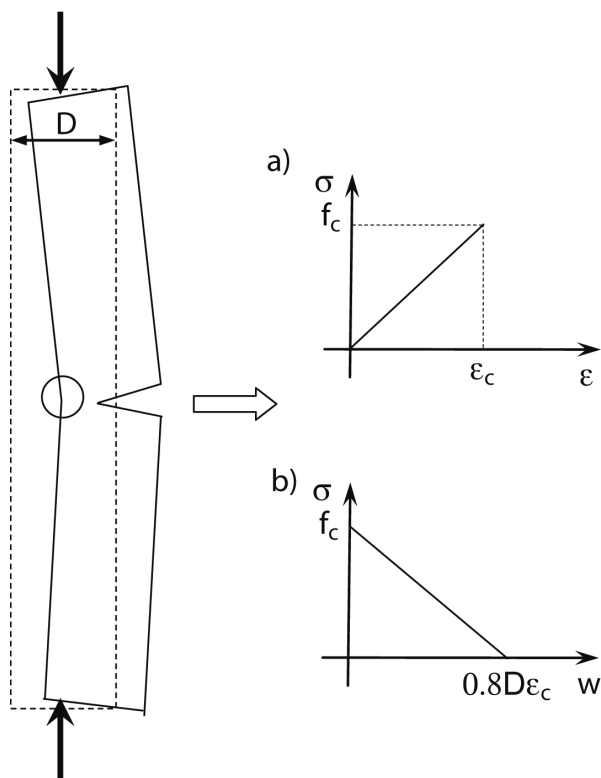


Figura 3. Modelado del hormigón en compresión: a) Diagrama tensión-deformación; b) Diagrama tensión-desplazamiento.

Los elementos que vamos a modelar en general tienen una cuantía baja de armado. En estas condiciones se genera inicialmente una zona microfisurada en la fibra más traccionada en torno a la sección central, de la que surge posteriormente una única fisura [31,32]. Vamos a considerar que sólo progresa una fisura cohesiva en la sección central del panel. Esta fisura va a representar el comportamiento en fractura del hormigón en la zona central del panel y/o pilar. De esta forma se simplifica el tratamiento numérico.

Al igual que en el proceso de fractura en tracción, en compresión también se observa una localización del daño tras alcanzar la resistencia a compresión. El comportamiento es más complejo que en tracción debido al confinamiento del material. Estos efectos fueron ampliamente estudiados por van Mier [33]. Hillerborg propuso un modelo sencillo, similar al de fisura cohesiva, para reproducir el comportamiento del hormigón en compresión [34]. Antes de alcanzar la carga máxima el

comportamiento del hormigón es descrito mediante un diagrama tensión-deformación, Figura 3a, y tras la carga máxima por un diagrama tensión-desplazamiento, Figura 3b, donde  $D$  es el canto del elemento. Este tipo de modelado es coherente con el fenómeno físico de pérdida de rigidez del elemento por fisuración.

El comportamiento de la intecara acero-hormigón se modela a partir de una ley que relaciona las tensiones tangenciales que se transmiten con el desplazamiento relativo entre los materiales. El esfuerzo tangencial lo podemos representar a través de una función que representa la tensión de adherencia por unidad de longitud, Figura 4a.

$$q = p\tau(s) \quad (2)$$

Donde  $p$  es el perímetro de la sección de refuerzo. La acción del acero sobre el hormigón está totalmente determinada por la distribución de  $q$  a lo largo de la armadura, la cual depende a su vez de la relación tensión-deformación del acero y de la ley de adherencia,  $\tau(s)$ , véase la Figura 4b. El modelo admite todo tipo de funciones  $\tau(s)$ .

El modelo se plantea en grandes desplazamientos para que en cada iteración se tenga en cuenta el cambio en la geometría. De esta forma el fallo por pandeo queda explícitamente incorporado al modelo

## 2.2. Modelo mecánico

La Figura 5 esquematiza el modelo mecánico propuesto para estudiar el pandeo de los paneles y pilares. El panel se encuentra biarticulado en ambos extremos y la carga se aplica con una excentricidad inicial,  $e_0$ , que es constante y del mismo signo a lo largo del panel o pilar. Al existir simetría con respecto a la sección central, se representa y se modela únicamente la mitad del panel. La fisura cohesiva situada en la sección central del panel se representa por medio de unos elementos tipo muelle que siguen la función de ablandamiento del hormigón. La masa del hormigón se discretiza de modo continuo usando elementos triangulares de 6 nodos. Para modelar el refuerzo se crean una serie de líneas de nodos en los elementos que representan al hormigón. Dichos nodos se duplican y se unen entre sí por medio

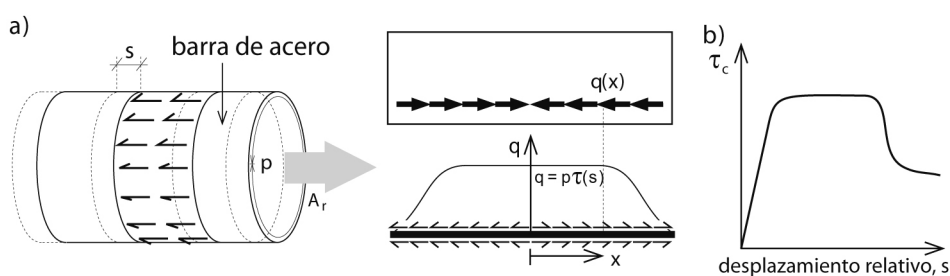


Figura 4. Mecanismo de adherencia hormigón-acero: (a) Carga transferida a través de la intecara; (b) Tensión rasante por unidad de longitud.



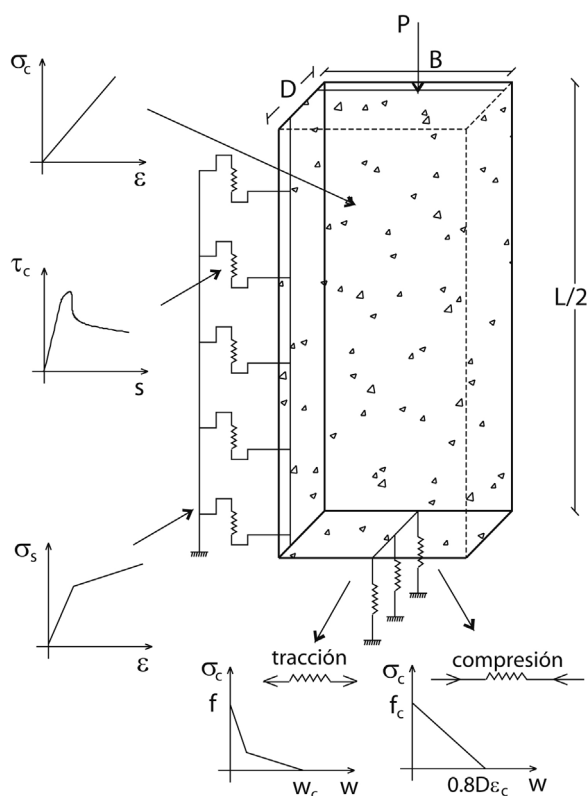


Figura 5. Modelo mecánico.

de unos elementos tipo barra que simulan el refuerzo. El primer nodo, coincidente con el extremo en la fisura cohesiva se bloquea en su movimiento vertical con objeto de representar la restricción al movimiento debida a la mitad de armadura no simulada. Los nodos que representan la armadura se conectan con sus recíprocos en el hormigón por medio de unos elementos tipo muelle que transmiten una fuerza entre ellos, la cual se calcula teniendo en cuenta el perímetro de la sección de la armadura, la distancia entre nodos y la ley de tensiones tangenciales. Se debe de disponer un número de ele-

mentos tal que resuelva la zona de transferencia de tensiones entre acero y hormigón. Este número de elementos estará relacionado con la longitud de anclaje necesaria para las barras. Para que los elementos barra se desplacen conjuntamente con la matriz de hormigón hemos dispuesto unos elementos horizontales muy rígidos que unen los nodos de las barras con sus correspondientes nodos en el hormigón en sentido transversal. Hacemos, pues, la hipótesis de que las barras están siempre sujetas por cercos y de que el recubrimiento es suficiente para evitar el pandeo de las barras.

Es importante destacar que esta forma de modelar la armadura conserva la continuidad en el hormigón y, por tanto, permite que la fisura cohesiva progrese a través de la capa o capas de armado. Este modelo también es compatible con hipótesis más refinadas para representar el comportamiento de la matriz del hormigón, como aquellas en las que se tiene en cuenta la microfisuración, el efecto de la fluencia o el envejecimiento del hormigón. Para modelar varias capas de armado simplemente se deben disponer elementos tipo barra situados en varias capas unidos al hormigón. En la Figura 6 mostramos la discretización realizada de la masa de hormigón y la posición de las capas de armado.

La carga se introduce a través de un desplazamiento impuesto sobre una placa con una rigidez muy superior a la del hormigón en el extremo de la mitad del panel modelado. De esta forma podemos evaluar la carga de pandeo del panel o pilar para diferentes excentricidades. En los resultados que mostraremos en los apartados siguientes no hemos tenido en cuenta el peso propio del panel, el cual, para paneles muy esbeltos, puede ser una fracción importante en la carga resistida. No obstante, introducir este parámetro en los cálculos es relativamente sencillo. Por último indicamos que el modelo mecánico presentado es extrapolable a tres dimensiones, con lo que se podría estudiar el problema del pandeo con flexión esviada.

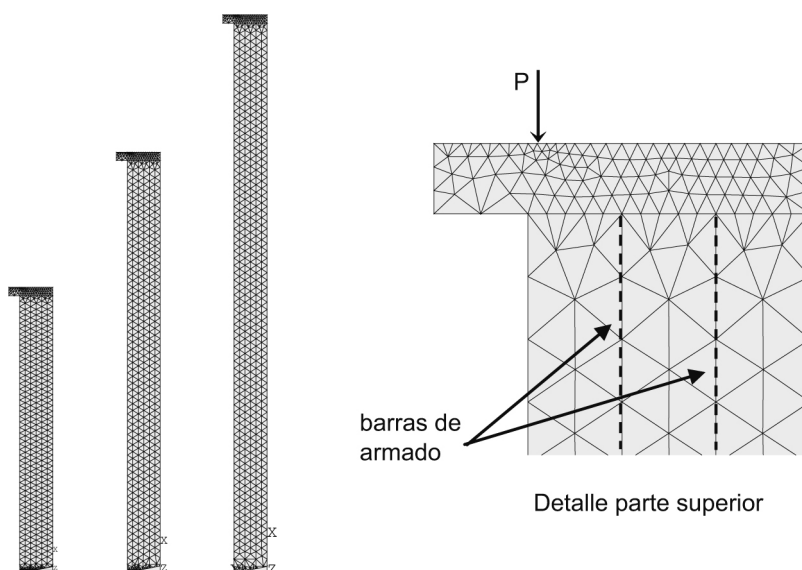
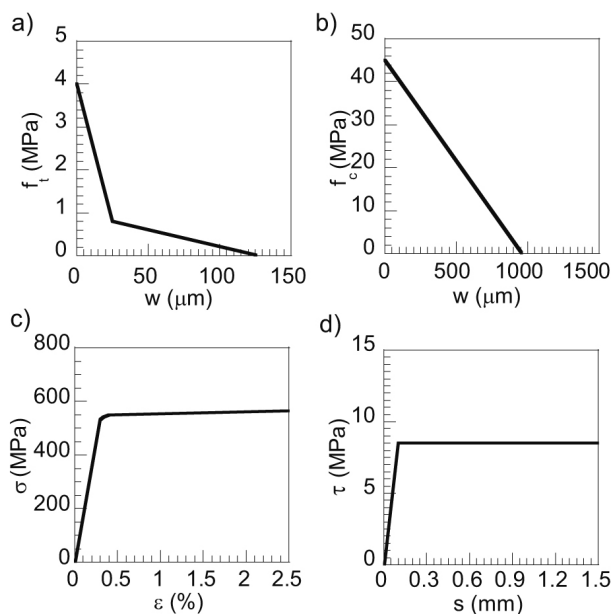


Figura 6. Ejemplo de mallado.



**Figura 7.** Características de los materiales: a) Curva de ablandamiento del hormigón; b) Diagrama tensión de compresión-desplazamiento; c) Diagrama tensión-deformación para el acero; d) Diagrama tensión rasante-deslizamiento relativo hormigón-acero.

Para la implementación y resolución de este modelo hemos utilizado el programa de elementos finitos ANSYS. Con ello también queremos mostrar que es posible con herramientas comerciales la resolución de este tipo de modelos, los cuales son extrapolables fácilmente para permitir la resolución de otros tipos de problemas, como pudieran ser el estudio de refuerzos mediante fibras de carbono (añadiendo una nueva línea de refuerzo con las características de las fibras) o la utilización de hormigones con fibras o cualquier material cuasifrágil siempre que esté debidamente caracterizado.

### 3. CARACTERIZACIÓN DE LOS MATERIALES

Una cuestión fundamental a la hora de plantear el modelo ha sido la selección de ecuaciones constitutivas para los materiales cuyas características mecánicas puedan ser obtenidas a través de ensayos estandarizados. En el caso del hormigón las propiedades mecánicas que es necesario determinar son el módulo de elasticidad,  $E_c$ , la resistencia a tracción,  $f_t$ , la resistencia a compresión,  $f_c$  y la energía de fractura,  $G_F$ . Todas estas propiedades pueden ser obtenidas mediante ensayos relativamente sencillos de realizar. También es necesario conocer la deformación última del hormigón,  $\epsilon_{u,c}$ , la cual puede ser evaluada bien a través de ensayos a compresión para obtener la curva tensión-deformación completa, o bien a partir de los diversos diagramas tensión-deformación propuestos en la bibliografía para el hormigón [11, 35–37]. A partir de las características enumeradas podemos obtener tanto la función de ablandamiento para tracción [14] como el diagrama tensión-desplazamiento en compresión [34]. En la actualidad el comportamiento del hormigón en compresión y su modelado

son objetos de intensa investigación. En los próximos años es de esperar que aparezcan nuevas relaciones más ajustadas a la realidad del fenómeno físico. Este es uno de los caminos que podrá enriquecer el modelo que proponemos.

Para modelar el comportamiento del acero introducimos la curva tensión-deformación como dato en el modelo. Podemos introducir bien la curva obtenida directamente desde el ensayo de las barras, o algún diagrama simplificado, como puede ser una curva elasto-plástica o elasto-plástica con endurecimiento.

La adherencia hormigón-acero también es un parámetro del modelo. Esta característica se introduce a través de la curva tensión rasante-deslizamiento relativo entre hormigón y acero,  $\tau_c - s$ . La curva puede ser obtenida experimentalmente o en base a los modelos propuestos en las diferentes normativas, véase por ejemplo [11].

En la Figura 7 mostramos un ejemplo de las características de los diferentes materiales a introducir en el modelo. Las características del hormigón, el acero y la intercara hormigón-acero mostradas corresponden a un caso real. La caracterización de los materiales así como las propiedades adherentes entre ambos fueron medidas en el laboratorio de Estructuras de la ETS de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Castilla-La Mancha a partir de probetas facilitadas por la empresa INDAGSA. La Figura 7a muestra la función de ablandamiento. En este caso se ha optado por una función bilineal, en particular la conocida como función bilineal de Hillerborg [27], siendo susceptible el modelo de utilizar cualquier otra propuesta en la Bibliografía científica [14]. La Figura 7b muestra la relación tensión de compresión-desplazamiento utilizada para modelar el comportamiento en compresión tras alcanzarse la tensión máxima en el hormigón. El diagrama tensión-deformación utilizado para modelar el comportamiento del acero es el mostrado en la Figura 7c. En este caso se ha optado por un diagrama simplificado elasto-plástico con endurecimiento, obtenido a partir de los resultados de los ensayos de las barras a tracción. El acero ensayado fue del tipo B500S y el diámetro de las barras fue de 8 mm. Por último mostramos el diagrama tensión rasante-deslizamiento relativo entre hormigón y acero  $\tau_c - s$ . La curva elegida ha sido elasto-plástica ya que hemos observado que es una curva de gran sencillez y que reproduce de forma adecuada el comportamiento adherente entre hormigón y acero, véase la referencia [23]. El módulo elástico del hormigón tiene un valor de 29.5 GPa y se introduce como característica del material de los elementos triangulares de 6 nodos con los que se modela la matriz de hormigón del panel o pilar. Igualmente, el coeficiente de Poisson utilizado es de 0.2.

Las características de los materiales anteriormente mostradas son las que vamos a utilizar en los diversos estudios paramétricos que hemos realizado para comprobar la sensibilidad y respuesta del modelo propuesto.

## 4. RESULTADOS

En esta sección vamos a exponer los resultados de un ejemplo para analizar la respuesta del modelo y mostrar los resultados que genera. Posteriormente realizaremos una contrastación del modelo con experimentación realizada sobre el tema. Tras ello presentaremos los resultados de unos estudios paramétricos variando la excentricidad, la cuantía de armado, la esbeltez y las características del hormigón para comprobar la respuesta del modelo ante el cambio de estos parámetros.

### 4.1. Ejemplo de cálculo

Como ejemplo vamos a modelar el comportamiento de un panel de hormigón armado que tiene una altura,  $L$ , de 2900 mm, un canto,  $D$ , de 120 mm y un ancho,  $b$ , de 1000 mm. El armado del panel está formado por 2 capas de 4 barras de 8 mm de diámetro cada una situadas longitudinalmente a lo largo del panel a una distancia de 40 mm de los paramentos. La excentricidad inicial considerada para el cálculo es  $e_0 = 20$  mm, véase la Figura 8a. En este trabajo hemos considerado la tensión de compresión en el hormigón como positiva, mientras que en las barras de acero la tensión de tracción es la que se ha considerado como positiva.

En la Figura 8b se muestra la curva carga-desplazamiento en el punto de aplicación de la carga ( $P - u$ ). La curva resultante está formada por una parte inicial lineal. Antes de llegar a la carga máxima se observa una pérdida de linealidad causada tanto por el comporta-

miento no lineal del material como por el aumento de la deformación transversal del panel. En un cierto momento la curva alcanza un máximo, e inmediatamente después la estructura pandea, los desplazamientos transversales comienzan a crecer rápidamente y se acaba produciendo el agotamiento de la pieza. Tras la descarga por agotamiento de la sección de hormigón queda una carga residual debida a las barras. La Figura 8c muestra el gráfico carga frente a la excentricidad adicional ( $P - e$ ). La excentricidad adicional se va a considerar igual a la flecha del panel en el centro de vano. En la curva resultante se observa claramente el carácter no lineal del proceso. La excentricidad adicional crece a lo largo de todo el proceso de carga y claramente se observa el salto tras la carga máxima que indica el fallo por pandeo. En la Figura 8d dibujamos el gráfico carga-momento ( $P - M$ ). El momento se calcula como la carga actuante multiplicada por la suma de la excentricidad inicial más la adicional. En este mismo gráfico y en línea discontinua se ha dibujado una recta cuya pendiente es la inversa de la excentricidad inicial. Esta recta representa la relación carga-momento en el caso de que no existieran efectos de segundo orden. El diagrama carga-momento se va alejando de esta recta conforme se desarrolla el proceso carga debido a la no linealidad introducida tanto en el comportamiento del material como por la consideración de la deformada real en cada paso del proceso de carga. Tras el fallo por pandeo vemos como la carga desciende bruscamente provocando un descenso del momento en la sección central.

En la Figura 9 analizamos la variación de las tensiones normales en el hormigón en la sección central del panel

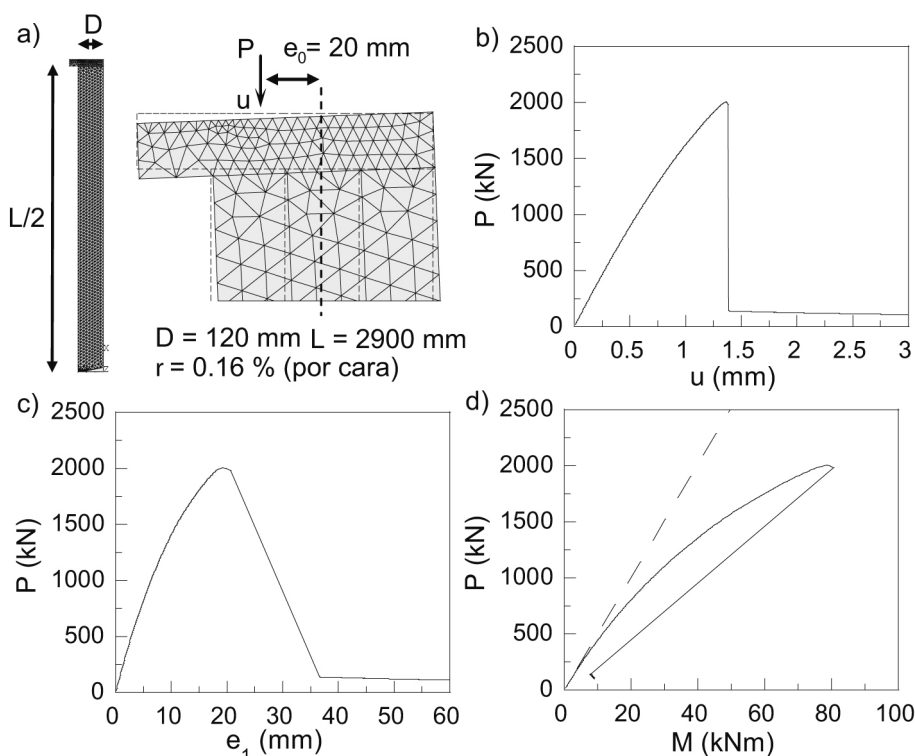


Figura 8. Ejemplo de cálculo: (a) Geometría del panel modelado; (b) Curva carga-desplazamiento en el punto de aplicación de la carga ( $P - u$ ); (c) Curva carga frente a la excentricidad adicional ( $P - e$ ); (d) Diagrama carga-momento ( $P - M$ ).

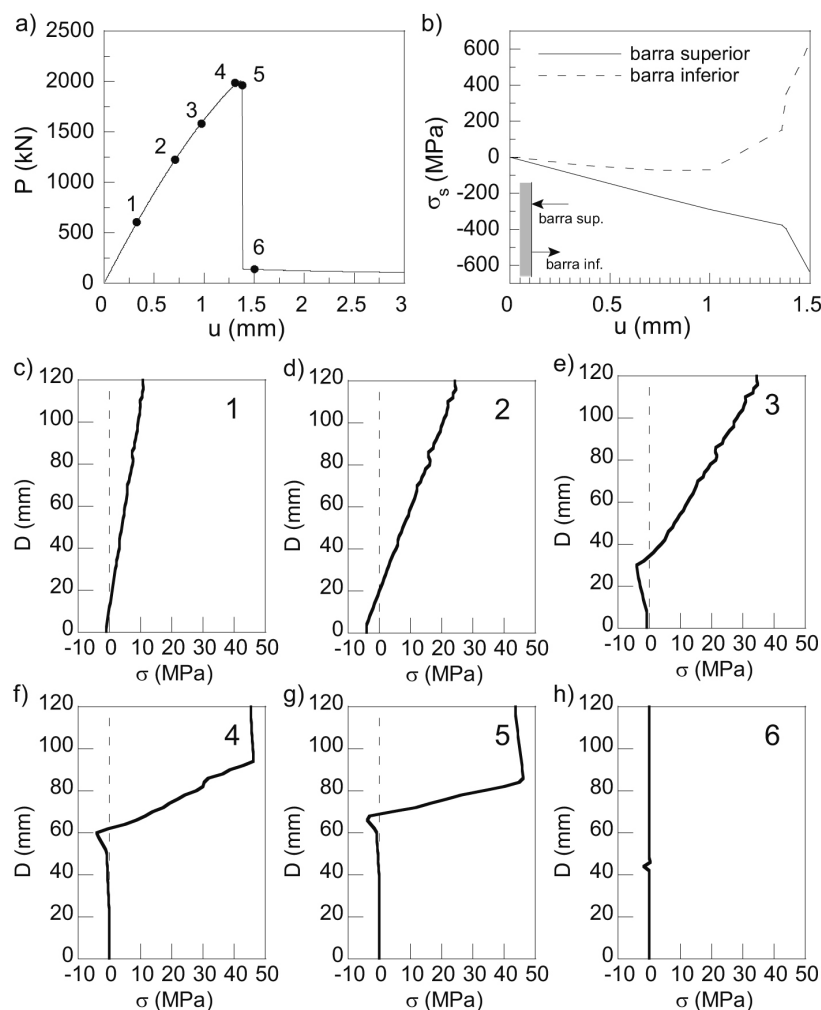


Figura 9. Ejemplo de cálculo: a) Curva  $P - u$ ; b) Tensiones en la barras de acero. Perfil tensional para: c)  $u=0.35$  mm; d)  $u=0.75$  mm; e)  $u=1.00$  mm; f)  $u=1.36$  mm; g)  $u=1.38$  mm; h)  $u=1.50$  mm.

y en las barras de acero durante el proceso de carga. La Figura 9a muestra la curva carga-desplazamiento en el punto de aplicación de la carga. En esta curva hemos marcado 6 puntos que nos facilitarán la observación de la evolución de las tensiones a lo largo del proceso de carga. La variación de las tensiones en las barras de acero se muestra en la Figura 9b. Denominamos barra inferior a la barra que está más cerca de la zona inicialmente traccionada y barra superior a la que está más cerca del paramento más comprimido. Inicialmente las barras están descargadas, al ir aumentando la carga externa las barras comienzan a trabajar, primero ambas están comprimidas y al ir evolucionando el proceso de fisuración la barra inferior se tracciona mientras que la barra superior se queda dentro del área comprimida.

Las Figuras 9c-h muestran los perfiles de las tensiones normales en el hormigón en la sección central del panel, es decir la sección donde hemos introducido la fisura cohesiva. Cada perfil muestra el estado tensional para un punto del diagrama  $P - u$  representado en la Figura 9a. Cada punto seleccionado es indicado con un número que coincide con el mostrado en cada perfil. En el inicio del proceso de carga, Figuras 9c y d, el perfil de tensión es prácticamente plano, sin alcanzar ni la resisten-

cia a compresión ni la resistencia a tracción del hormigón. En la Figura 9e se aprecia que la fisura ya ha comenzado a propagarse. Existe una zona traccionada que representa el efecto cohesivo en la rotura a tracción introducido en el modelo a través de la fisura cohesiva. La Figura 9f muestra el perfil en el momento de alcanzar la carga máxima. El hormigón en la zona comprimida ha alcanzado la resistencia máxima y el modelo reproduce la localización de este daño. Tras la carga máxima se produce el pandeo del elemento estructural y los desplazamientos horizontales aumentan considerablemente. Este aumento de los desplazamientos provoca la rotación de la sección y el agotamiento. En el perfil de tensiones mostrado en la Figura 9g puede observarse que se pasa del bloque comprimido al traccionado, de menor tamaño, de forma muy brusca. Poco después, el elemento falla y se produce su descarga, Figura 9h.

Con este ejemplo hemos querido ilustrar como el modelo propuesto reproduce todo el proceso de pandeo del elemento teniendo en cuenta tanto la fractura del material como la inestabilidad geométrica. En un ordenador Pentium 4 a 2.6 GHz el tiempo de cálculo de un modelo con 500 pasos de carga es de unos 4 minutos.



## 4.2. Validación del modelo

Una vez que hemos presentado un ejemplo de la respuesta del modelo vamos a contrastar los resultados obtenidos con casos experimentales. Si bien existen numerosos estudios experimentales de pandeo en pilares de hormigón, la mayoría de las publicaciones y estudios no recogen una completa caracterización de los materiales y en muchos casos las metodologías de ensayo seguidas hacen difícilmente modelables los mismos. Asimismo señalamos la dificultad que entraña la realización de unos ensayos estables tras la carga máxima y en los que todo el proceso de pandeo quede recogido convenientemente. En particular, para contrastar el modelo vamos a utilizar los resultados de la campaña experimental realizada por Bažant y Kwon [38] para estudiar el efecto de escala en el pandeo de piezas de hormigón. La razón fundamental para tomar estos resultados es la cuidada realización de los ensayos y el amplio rango cubierto con ellos. En esta campaña se ensayaron 9 tipos de pilares variando la esbeltez y las dimensiones de la sección de los mismos. En su trabajo, Bažant y Kwon exponen toda la metodología experimental seguida, las características de los materiales utilizados en la fabricación de los pilares y los resultados obtenidos.

Los pilares fueron ejecutados con un micro-hormigón con un tamaño máximo de árido de 3 mm. La resistencia del hormigón medida en probetas cilíndricas de 150 mm de alto por 75 mm de diámetro fue de 28.96 MPa. Para realizar el armado utilizaron barras de acero lisas con un módulo de elasticidad de 200 GPa y un límite elástico de 552 MPa. El porcentaje de armado se mantuvo constante en todo el programa experimental siendo igual a 4.91 %. Se ensayaron tres secciones cuadradas de pilares diferentes de lado 12.7, 25.4 y 50.8 mm. Para cada tamaño se realizaron pilares de tres esbelteces diferentes con un valor igual a  $\lambda = 19.2, 35.8$  y  $52.5$ . Por cada tipo de pilar se ensayaron tres probetas. En total se realizaron 27 ensayos.

La Figura 10 muestra los resultados obtenidos en la experimentación y los obtenidos con el modelo. En la

Figura 10a en ordenadas representamos la carga máxima obtenida en los ensayos y con el modelo y en abscisas la esbeltez de la columna. El modelo capta de forma sensiblemente correcta la carga máxima obtenida experimentalmente y responde al aumento de la esbeltez, disminuyendo la carga de fallo al aumentar ésta. También al aumentar el tamaño de la sección aumenta la carga, como era de esperar. En la Figura 10b mostramos en abscisas nuevamente la esbeltez y en ordenadas el valor del desplazamiento o flecha en la sección central en el momento de alcanzar la carga máxima. Experimentalmente se aprecia que el desplazamiento aumenta al aumentar la esbeltez. El modelo reproduce este efecto y los valores obtenidos son del mismo orden que los valores obtenidos experimentalmente. Con carácter general las tendencias observadas experimentalmente y los valores obtenidos para la carga de pandeo y el desplazamiento han sido reproducidas por el modelo de forma sensiblemente correcta.

## 4.3. Efecto de la excentricidad de la carga

Partiendo del elemento modelado en la sección 4.1, vamos a presentar el resultado de diversos cálculos para ver cómo afecta una variación de la excentricidad en la respuesta del panel. Hemos realizado cálculos para unas excentricidades que varían desde 1 mm hasta 200 mm. En la Figura 11a mostramos las curvas  $P - u$  obtenidas. La respuesta es variable con la excentricidad. Al aumentar ésta, la carga máxima disminuye de forma considerable. El desplazamiento en carga máxima también disminuye al aumentar la excentricidad. No obstante, para excentricidades grandes, véase la Figura 11b, observamos que aunque la carga disminuye el desplazamiento vuelve a crecer. Esto es debido a que para excentricidades grandes el panel tiende a comportarse de forma más parecida a una viga que a un pilar. Gráficamente se observa que, para las curvas  $e_0 = 100$  mm y  $e_0 = 200$  mm, aparece un primer pico debido al momento en el que se alcanza la carga de fisuración y posteriormente una segunda rama creciente correspondiente a la entrada en carga del acero, siendo esta rama más dúctil que en el caso de excentricidades bajas.

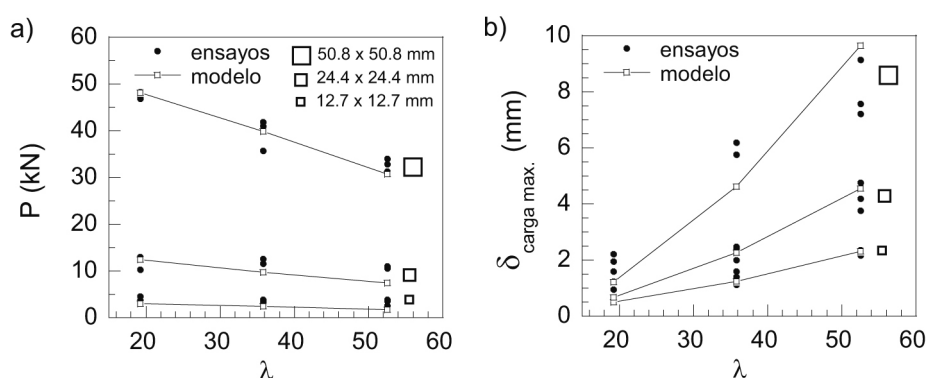


Figura 10. Contrastación experimental: a) Carga máxima; b) Desplazamiento en la sección central para la carga máxima, en función de la esbeltez.

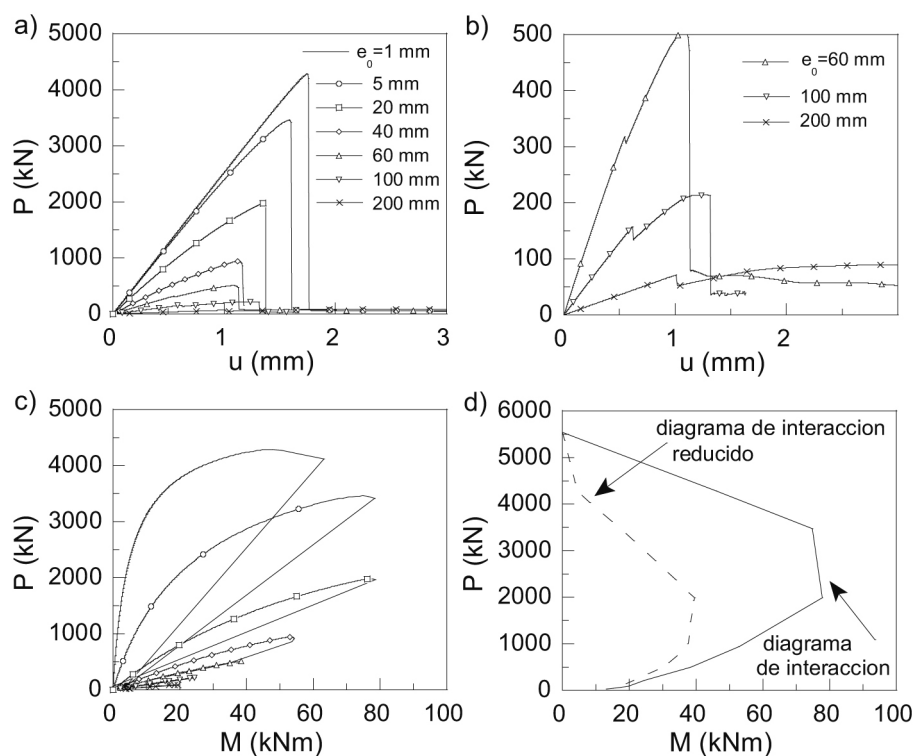


Figura 11. Influencia de la excentricidad: a) Curvas P - u; b) Curvas P - u, detalle para excentricidades mayores; c) Diagrama P - M; d) Diagramas de interacción.

En la Figura 11c representamos todas las curvas P - M obtenidas. Uniendo los puntos de carga máxima de estas curvas obtenemos el diagrama de interacción teniendo en cuenta los efectos de segundo orden para el panel modelado. Este diagrama se representa en la Figura 11d. Igualmente mostramos el diagrama de interacción reducido. En este diagrama se representa la carga frente al momento reducido, definido éste como el producto de la carga máxima por la excentricidad inicial,  $e_0$ . Hemos visto que a partir de los resultados del modelo podemos obtener los diagramas de interacción para una geometría dada. El modelo es susceptible de ser utilizado para evaluar estos diagramas de interacción y facilitar el diseño de elementos estructurales.

En el diagrama de interacción de la Figura 12b, identificamos una serie de puntos correspondientes a diferentes excentricidades que nos van a facilitar el análisis de los diagramas de tensiones. La variación de las tensiones en las barras de acero según la excentricidad se representa en la Figura 12b. Los perfiles tensionales en el hormigón para la carga máxima según las diferentes excentricidades se muestran en las Figuras 12c-h. En la Figura 12b observamos que, al aumentar la excentricidad, las barras pasan de estar comprimidas a traccionarse cada vez más, hasta llegar al caso de mayor excentricidad en el que las dos armaduras dispuestas llegan a plastificar para la carga máxima. En los perfiles tensionales se observa que, para excentricidades pequeñas, Figura 12c, la sección está completamente comprimida. Al ir aumentando la excentricidad, el bloque comprimido se va haciendo cada vez más pequeño hasta llegar a ser el perfil tensional cada vez más pare-

cido al de una viga. En el caso extremo, Figura 12h, el bloque comprimido se reduce a una pequeña fracción de la parte superior de la viga. Con este ejemplo se observa claramente la transición al variar la excentricidad desde el comportamiento del panel a compresión prácticamente centrada, cuando la excentricidad es pequeña, a una flexión prácticamente pura para una excentricidad alta. En todos los casos el modelo representa el fallo por inestabilidad.

#### 4.4. Efecto de la cuantía de armado

En este apartado analizamos el comportamiento de un panel cuando se varía la cuantía de armado. Las cuantías indicadas en las figuras presentadas en esta sección son por cara, de modo que el total de la cuantía de acero del panel sería el doble de la indicada. En la Figura 13 se aprecia cómo el aumento de la cuantía provoca un aumento de la carga máxima y del desplazamiento en el centro del vano (excentricidad adicional). Tras la carga máxima observamos que la respuesta del modelo también está influida por la cuantía, obteniéndose que los valores de carga post-pico para cuantías altas llegan a tener un valor significativo. Este comportamiento post-pico puede ser de especial importancia en la evaluación de estructuras ya ejecutadas o que hayan sufrido algún tipo de daño. La Figura 13b muestra los diagramas carga-momento obtenidos. Todas las cargas máximas se sitúan aproximadamente en la una línea recta que pasa por el origen.

La Figura 14a muestra la evolución de la carga de pandeo frente a la cuantía de armado. Tal y como indica-

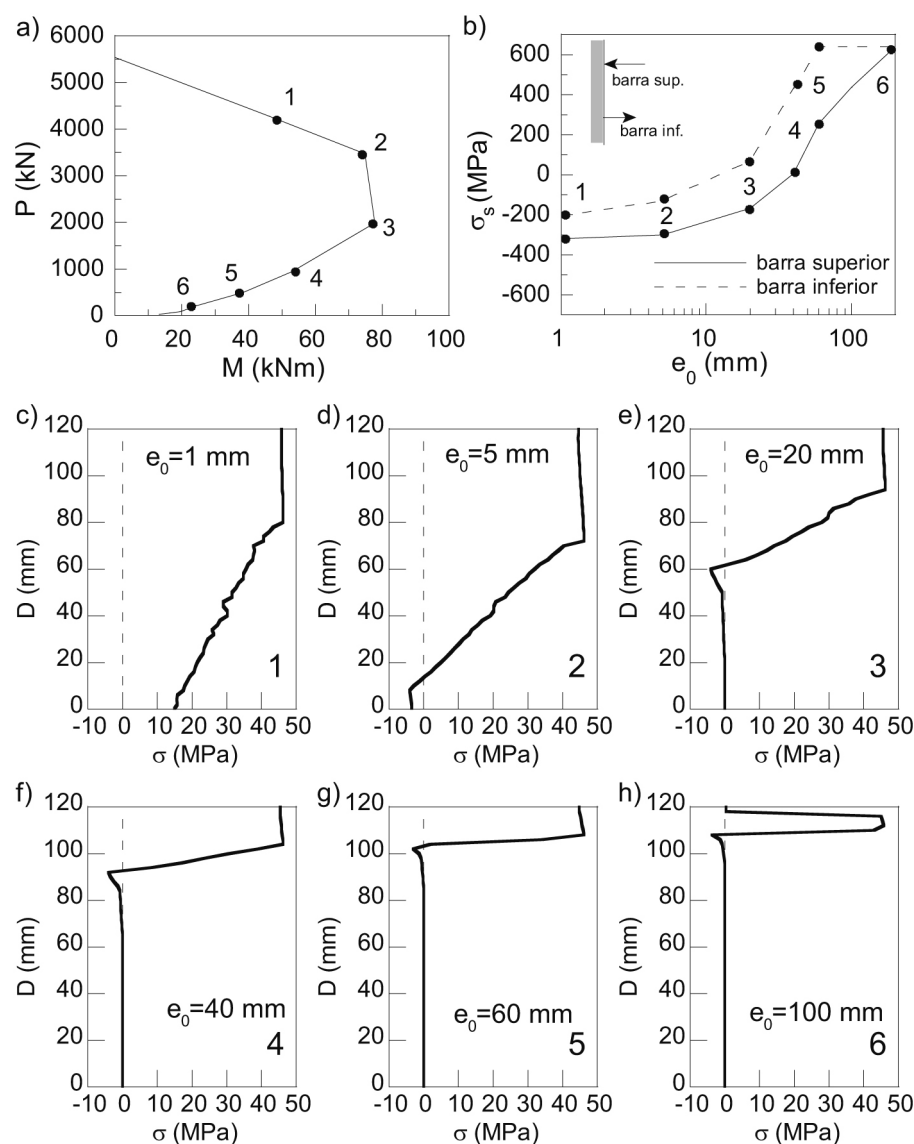


Figura 12. In fluencia de la excentricidad: a) Diagrama de interacción; b) Tensiones en las barras de acero. Perfil tensional para: c)  $e_0 = 1$  mm; d)  $e_0 = 5$  mm; e)  $e_0 = 20$  mm; f)  $e_0 = 40$  mm; g)  $e_0 = 60$  mm; h)  $e_0 = 100$  mm.

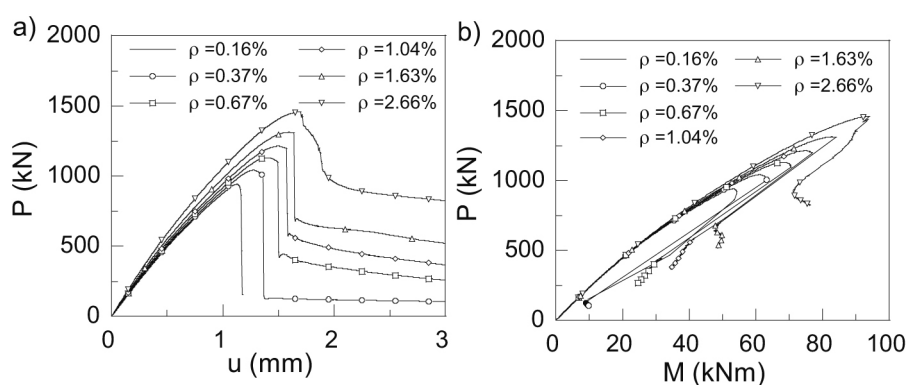


Figura 13. Influencia de la cuantía: a) Curvas  $P - u$ ; (b) Diagramas  $P - M$ .

mos anteriormente, la carga crece al aumentar la cuantía, aunque este crecimiento no es proporcional al incremento de cuantía. En la Figura 14b podemos ver la variación de la tensión en las barras al aumentar la

cuantía. La tensión en las barras disminuye al aumentar la cuantía, lo que significa que la sección de las barras se aprovecha peor. El modelo tiene en cuenta la rigidez de las barras. Por ello aumentar su diámetro las barras

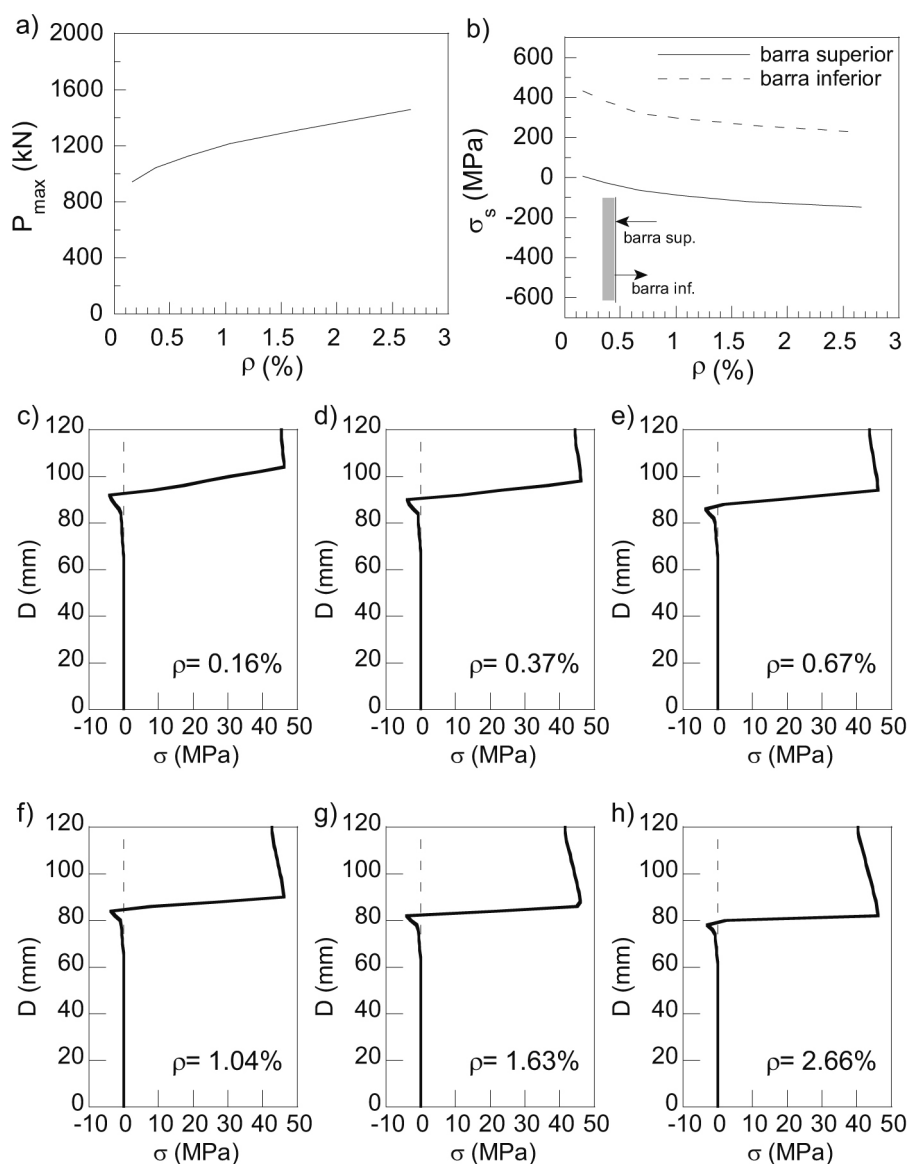


Figura 14. Influencia de la cuantía: a) Variación de la carga con la cuantía de armado; b) Tensiones en la barras de acero. Perfil tensional para: c)  $\rho = 0.16\%$ ; d)  $\rho = 0.37\%$ ; e)  $\rho = 0.67\%$ ; f)  $\rho = 1.04\%$ ; g)  $\rho = 1.63\%$ ; h)  $\rho = 2.66\%$ .

son más rígidas y colaboran activamente para impedir el pandeo del elemento. Las Figuras 14c-h representan los perfiles tensionales en el hormigón para cada una de las cuantías modeladas. El aumento de la cuantía provoca un crecimiento del bloque comprimido, lo que se traduce en un aumento de la capacidad de carga del elemento. En este caso observamos que la máxima tensión en el hormigón no se alcanza en la fibra más externa sino que se obtienen en un punto interior. Este efecto es debido a la metodología seguida en el modelado del daño en compresión [34]. Una vez que en el extremo se llega a la máxima tensión posible se va produciendo un agotamiento de la sección y la tensión va disminuyendo.

#### 4.5. Efecto de la esbeltez

Para estudiar cómo responde el modelo a los cambios de esbeltez vamos a presentar una serie de cálculos partiendo de la geometría del panel que nos ha servido de

ejemplo en la sección 4.1. En esta ocasión la cuantía de armadura dispuesta por cara es igual al  $0.67\%$  y la excentricidad inicial utilizada en los cálculos ha sido de 40 mm. La altura del panel se ha variado desde los 2 metros hasta los 9 metros, lo cual, es equivalente a variar la esbeltez mecánica desde 55.5 a 250. Este último caso está fuera de las recomendaciones dadas por la Normativa española EHE [16], no obstante con el modelo podemos llegar a predecir el comportamiento mecánico de este panel. La Figura 15a muestra la curvas  $P - u$  obtenidas. Cuando se aumenta la esbeltez disminuye la carga de pandeo, pero al incrementarse la flexibilidad del elemento el desplazamiento transversal en carga máxima también se ve incrementado. Al ser el panel más esbelto, el efecto de la excentricidad es mayor, comprobándose que para los paneles más esbeltos obtenemos curvas similares a las que obteníamos en el caso de aplicar excentricidades más grandes en paneles más pequeños. En la Figura 15b se aprecia que al aumentar la esbeltez se acentúa el carácter no lineal de la res-



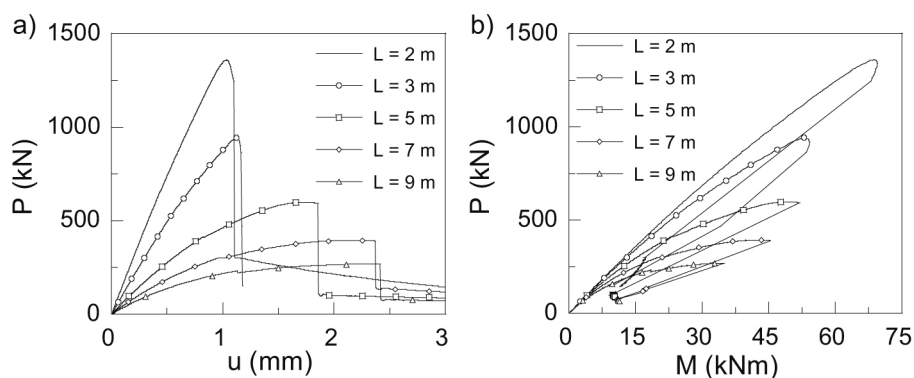


Figura 15. Influencia de la esbeltez: a) Curvas  $P - u$ . b) Diagramas  $P - M$ .

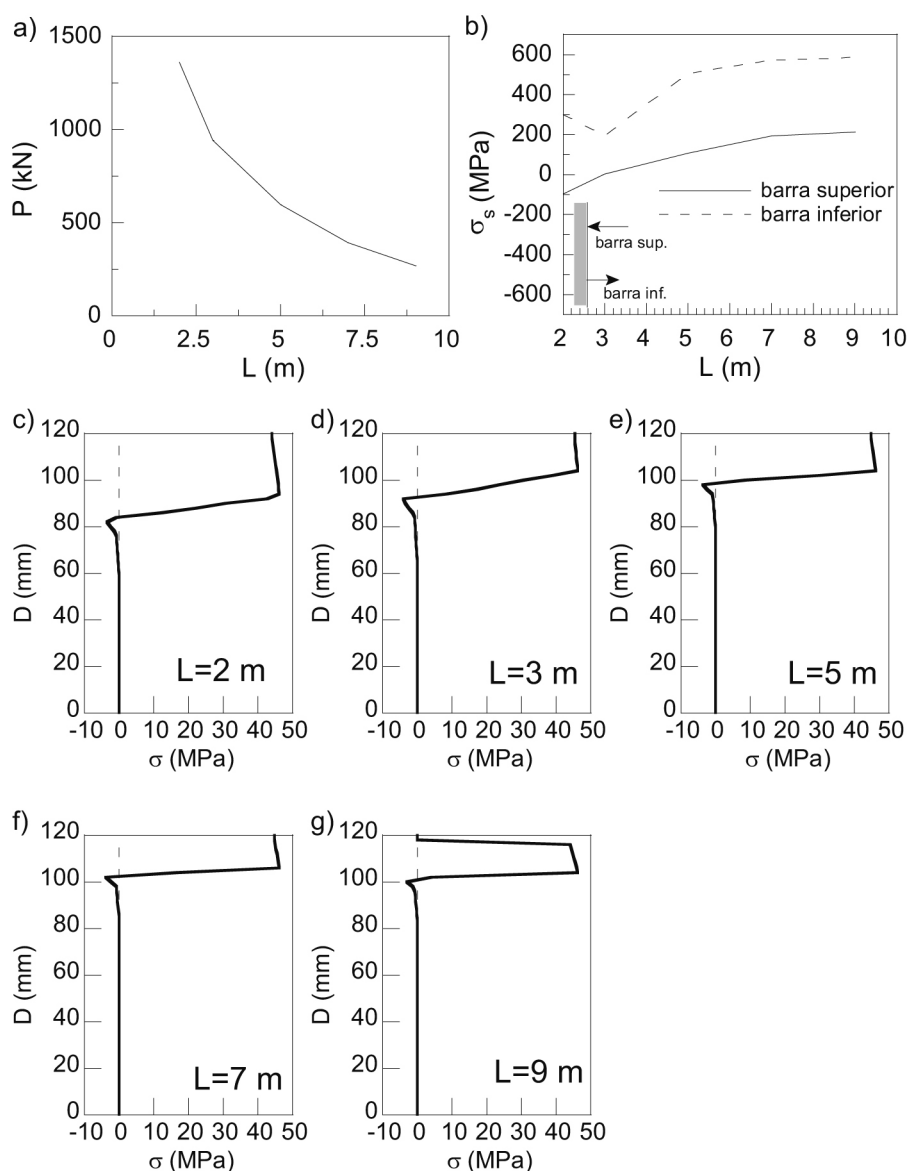


Figura 16. Influencia de la esbeltez: a) Variación de la carga con la altura del panel; b) Variación de las tensiones en las barras según la altura del panel. Perfil tensional para: c)  $L=2$  m; d)  $L=3$  m; e)  $L=5$  m; f)  $L=7$  m; g)  $L=9$  m.

puesta del panel, desviándose la curva carga-momento de la recta teórica obtenida al multiplicar la carga por la excentricidad inicial ( $M = P e_0$ ). Tanto el momento como la carga disminuyen con el aumento de la esbeltez.

La Figura 16a muestra un gráfico en el que se observa la variación de la carga frente a la altura del panel. La curva descrita sigue aproximadamente la trayectoria de una hipérbola, tal y como varía la carga de pandeo a través de la ecuación de Euler:

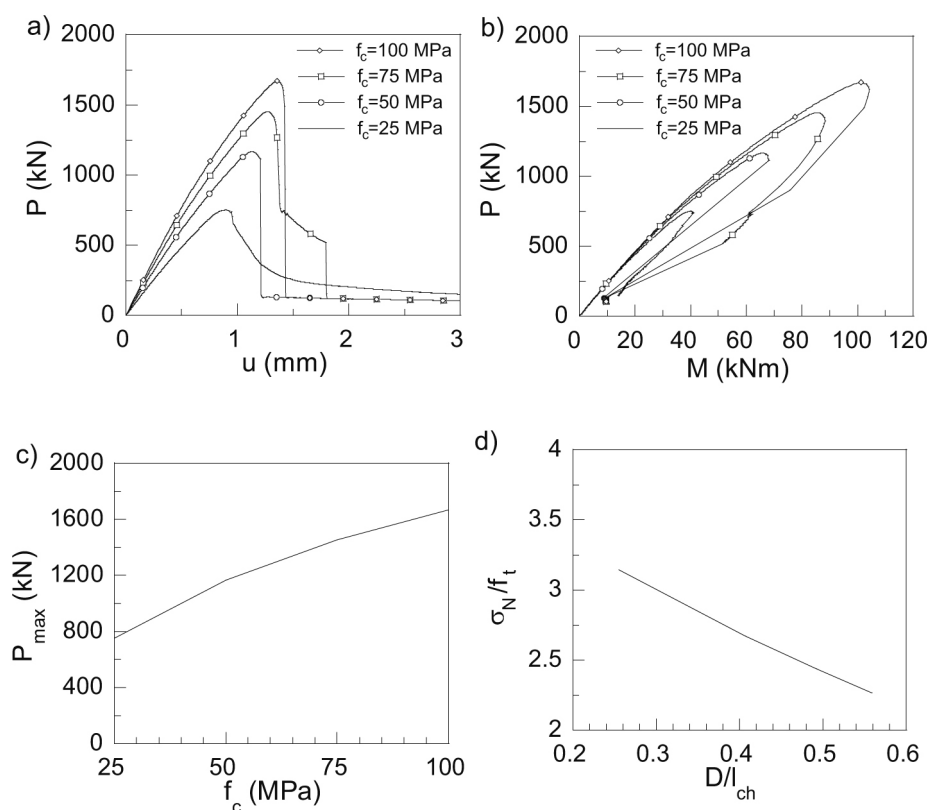


Figura 17. Influencia de la resistencia a compresión: a) Curvas  $P - u$ ; b) Diagramas  $P - M$ ; c) Variación de la carga según la resistencia a compresión; d) Efecto de escala al cambiar las propiedades de material.

$$P = \frac{K}{L^2} \pi^2 \quad (3)$$

Donde  $L$  es la longitud del panel y  $K$  es una constante dependiente de las características del material y de la geometría de la sección para el caso de comportamiento elástico lineal. En estructuras de hormigón armado  $K$  no es constante, ya que al tener en cuenta las características en fractura del hormigón para cada esbeltez la geometría de la sección es distinta en el momento del fallo. Este efecto se debe a que el proceso de fisuración ya ha comenzado en el momento del fallo, e implica que la rigidez de la sección se ha visto reducida. Este efecto se aprecia claramente en los diagramas de tensiones normales en el momento de fallo mostrados en las Figuras 16c-g. Al aumentar la esbeltez, el bloque comprimido se va haciendo más pequeño, efecto similar al observado al aumentar la excentricidad. Respecto a la variación de las tensiones en las barras de acero, en el modelo realizado, véase la Figura 16b, observamos que la tensión aumenta al aumentar la esbeltez debido a que los desplazamientos son mayores, tal y como se observó en la Figura 15a. No obstante, para esbelteces muy bajas se observa que también existe un incremento de la tensión en la barra inferior, debido a que en esos casos la sección se encuentra comprimida en mayor medida durante el proceso de carga, pudiéndose deformar transversalmente el elemento sin que el elemento llegue a pandear. Este resultado indica que para bajas excentricidades los efectos de segundo orden son menos importantes. Con este ejemplo hemos querido comprobar la

respuesta del modelo a los cambios de esbeltez del panel o pilar.

#### 4.6. Efecto de la resistencia del hormigón

El último estudio paramétrico que vamos a realizar está referido a la variación de la resistencia a compresión del hormigón. Para ser coherentes hemos variado todas las propiedades del mismo,  $f_t$ ,  $E_c$  y  $G_P$ , además de la resistencia a compresión,  $f_c$ . Los valores de las propiedades se han obtenido a partir de las expresiones recogidas en el Código Modelo [11]. Las resistencias a compresión para las que se ha modelado el panel son 25, 50, 75 y 100 MPa.

El panel utilizado tiene la misma geometría que el utilizado en la sección 4.1. El porcentaje de armado se estableció en el 0.37% por cara y la excentricidad inicial se ha mantenido constante e igual a 40 mm. En la Figura 17a mostramos las curvas  $P - u$  obtenidas. La carga de pandeo y el desplazamiento en carga máxima aumentan al aumentar la calidad del hormigón. El fallo se produce de forma más brusca al aumentar la resistencia. La Figura 17b muestra las curvas carga-momento. La variación en la resistencia, en este caso, es muy similar a la variación de la cuantía, Figura 13b. Los máximos se sitúan aproximadamente en una línea recta que pasa por el origen. El incremento en la resistencia del hormigón no aumenta el carácter no lineal de las curvas  $P - M$ , efecto contrario al que se observó al variar la esbeltez. La variación de la carga de pandeo con la resistencia se

muestra en la Figura 17c. La variación de la carga no es proporcional al aumento de la resistencia. Al pasar de un hormigón de una resistencia de 25 MPa a otro de 100 MPa se obtiene un aumento de un 100% en la carga del panel (de 800 a 1600 kN aproximadamente).

En la Figura 17d mostramos la tensión nominal adimensionalizada resistida por el panel en ordenadas y el tamaño del elemento relativo a las propiedades del material en abscisas. La tensión nominal es definida como:

$$\sigma_N = \frac{P}{bD} \quad (4)$$

Para adimensionalizarla se ha dividido por la resistencia a tracción  $f_t$ . El tamaño relativo es definido por el denominado número de fragilidad de Hillerborg [14],  $\beta_{Hr}$ , el cual se define como el cociente entre el tamaño del elemento, representado en este caso por el canto  $D$ , y la longitud característica del material,  $l_{ch}$  [28], ( $l_{ch} = EG_F / f_t^2$ ).

En la Figura 17d observamos que la resistencia nominal adimensionalizada disminuye al aumentar el tamaño relativo. Este hecho indica la existencia de un efecto de escala en el comportamiento del panel relativo a las propiedades del hormigón. Para comprender mejor este efecto podemos observar los perfiles de tensiones normales mostrados en las Figuras 18b-e. El eje de abscisas ha sido escalado según la resistencia a compresión del hormigón. Al aumentar la resistencia del material el bloque comprimido es relativamente más pequeño, lo que indica que un panel ejecutado con un hormigón de alta resistencia tiene una carga en rotura mayor aunque, el aprovechamiento que se hace de la sección de hormigón es menor. La variación de tensión en las barras es mostrada en la Figura 18a. La tensión, tanto en la barra superior como en la inferior, crece al aumentar la resistencia debido a que la fibra neutra cada vez está situada más cerca del borde superior. No obstante, el crecimiento de la misma no es muy significativo.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado una metodología práctica sencilla de implementar en códigos comerciales de elementos finitos para modelar el comportamiento de paneles y pilares de hormigón armado y estudiar su comportamiento a pandeo. El modelo reproduce el proceso de pérdida de rigidez del elemento durante el proceso de carga al aparecer fisuras, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal de los materiales (hormigón y acero) y la inestabilidad geométrica. El modelo está especialmente indicado para elementos esbeltos y con poca cuantía de armado (0-1 % por cara), donde la mayor parte del daño se localiza en la sección central. No obstante, para elementos muy armados (2-4 % por cara) la contrastación con resultados experimentales ha sido sensiblemente correcta.

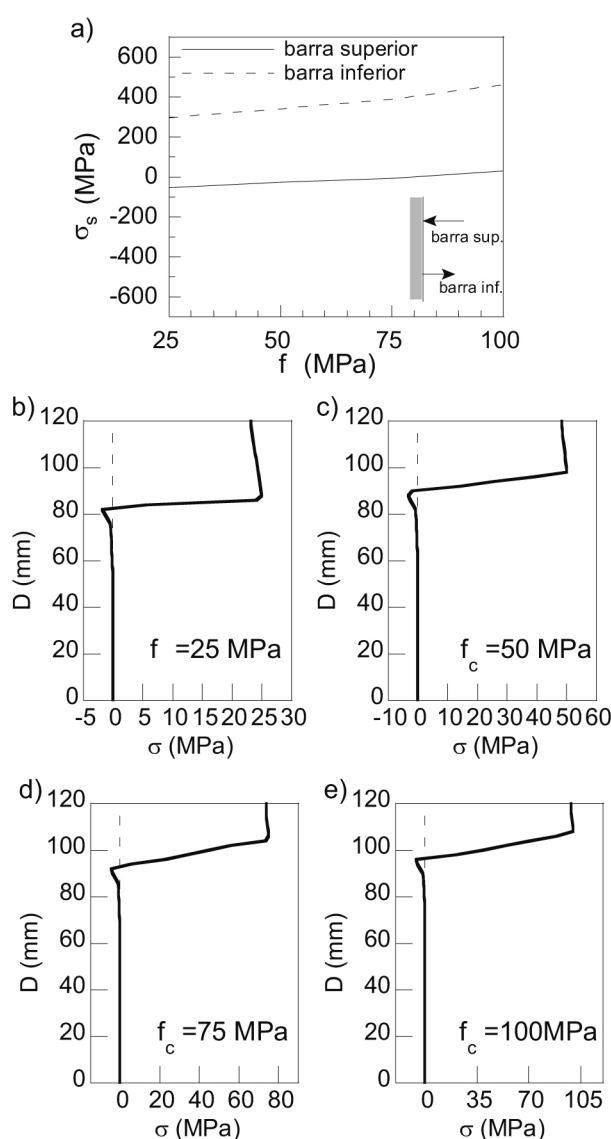


Figura 18. Influencia de la resistencia a compresión:

a) Variación de las tensiones en las barras.  
 Perfil tensional para: b)  $f_c = 25$  MPa; c)  $f_c = 50$  MPa; d)  $f_c = 75$  MPa;  
 e)  $f_c = 100$  MPa.

Para modelar el comportamiento del hormigón en fractura se han simplificado todos los procesos de fractura a una única fisura discreta situada en la parte central del elemento, a la que se la ha dotado de propiedades cohesivas. De esta forma se reproduce el comportamiento en tracción del hormigón. De forma simplificada se ha extrapolado este modelo, según la bibliografía consultada, para representar el comportamiento del hormigón en compresión. El modelo es sensible a la excentricidad inicial de la carga, a la esbeltez y a la cuantía de armado, además de serlo a las propias características de los materiales. Todos estos hechos confirman la aptitud de los modelos cohesivos para tratar la fractura del hormigón conjuntamente con el pandeo. También destacamos como a través del modelo se puede ayudar a comprender mejor el comportamiento de los elementos de hormigón armado esbeltos comprimidos.

Por la forma de modelar el hormigón a partir de todas sus características, incluyendo los parámetros en fractura, el modelo es susceptible de ser utilizado para estudiar el comportamiento frente a pandeo de pilares y paneles fabricados con otros tipos de hormigones como hormigones con fibras, hormigones ligeros, de alta resistencia y otros materiales considerados cuasifrágiles como fabricas de ladrillo o columnas de materiales pétreos, siempre que estén convenientemente caracterizados estos materiales.

### Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a la empresa INDAGSA perteneciente al Grupo Ortiz por la financiación concedida.

### REFERENCIAS

- [1] Z. P. Bažant and L. Cedolin. *Stability of Structures*. Dover, Mineola, New York, 2003.
- [2] R. Park and T. Paulay. *Reinforced Concrete Structures*. Wiley, New York, 1975.
- [3] Z. P. Bažant, L. Cedolin, and Tabbara M. R. New method of analyses for slender columns. *ACI Structural Journal*, 88 (4), 1991, 391–402.
- [4] Z. P. Bažant and Y. Xiang. Inelastic buckling of concrete column in braced frame. *Journal of Structural Engineering*, 123 (5), 1997, 634–642.
- [5] J. K. Kim and J. K. Yang. Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns. *Engineering Structures*, 17 (11), 1995, 39–51.
- [6] J. K. Kim and S. S. Lee. The behaviour of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending. *Engineering Structures*, 22 (11), 2000, 1518–1528.
- [7] C. Yalcin and M. Saatcioglu. Inelastic analysis of reinforced concrete columns. *Computers and Structures*, 77 (5), 2000, 539–555.
- [8] H. G. Kwak and J. K. Kim. Ultimate resisting capacity of slender RC column. *Computers and Structures*, 82, 2004, 901–915.
- [9] H. G. Kwak and J. K. Kim. Nonlinear behaviour of slender RC columns (1). Numerical formulation. *Construction and Building Materials*, 20, 2006, 527–537.
- [10] H. G. Kwak and J. K. Kim. Nonlinear behaviour of slender RC columns (2). Introduction of design formula. *Construction and Building Materials*, 20, 2006, 538–553.
- [11] CEB-FIP. *Model Code 1990, Design Code*. Technical Report 203-205, EFP Lausanne, 1991.
- [12] ACI318-02. *ACI Committee 318 Building Code Requirements for Reinforced Concrete*. American Concrete Institute, Detroit, 2002.
- [13] Ministerio de Fomento. *EHE-8 Instrucción del Hormigón Estructural*. Ministerio de Fomento, 2008.
- [14] Z. P. Bažant and J. Planas. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [15] J. R. Carmona. *Study of Cracking Processes in Reinforced Concrete Structures*. Ph. D. Thesis, Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, 2006.
- [16] Ministerio de Fomento. *EHE Instrucción del Hormigón Estructural*. Ministerio de Fomento, 1999.
- [17] G. Ruiz. Propagation of a cohesive crack crossing a reinforcement layer. *International Journal of Fracture*, 111 (3), 2001, 265–282.
- [18] A. Carpinteri, Ed. *Minimum Reinforcement in Concrete Members*. Number 24 in ESIS Publication. Elsevier, London, 1999.
- [19] D. A. Cendón. *Estudio de la Fractura en Modo Mixto de Hormigones y Morteros*. Ph.D. Thesis, Dept. de Ciencia de los Materiales, ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, Spain, 2002.
- [20] O. Hededal and I. B. Kroon. *Lightly Reinforced High-Strength Concrete*. M.Sc. Thesis, University of Ålborg, Denmark, 1991.
- [21] R. Brincker, M. S. Henriksen, F. A. Christensen, and G. Heshe. Size effects on the bending behaviour of reinforced concrete beams. In *Minimum Reinforcement in Concrete Members*, pages 127–180, London, A. Carpinteri, Ed. Elsevier, 1999.
- [22] N. H. Hawkins and K. Hjorsset. Minimum reinforcement requirement for concrete flexural members. In *Application of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, pages 379–412, London, A. Carpinteri, Ed. Elsevier, 1992.
- [23] G. Ruiz, J. R. Carmona, and D. A. Cendón. Propagation of a cohesive crack through adherent reinforcement layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (52), 2006, 7237–7248.
- [24] D. Ngo and A. C. Scordelis. Finite element analyses of reinforced concrete beams. *ACI Journal Proceedings*, 64 (3), 1967, 152–163.
- [25] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 1960, 100–108.
- [26] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle failure. *Advanced Applied Mechanics*, 7, 1962, 55–129.
- [27] A. Hillerborg, M. Modeer, and P. E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6, 1976, 773–782.



- [28] P. E. Petersson. *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials*. Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1981.
- [29] RILEM TC 89-FMT. Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Materials and Structures*, 23, 1990, 457–460.
- [30] RILEM TC FMC-1. Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. In *RILEM Recommendations for the Testing and Use of Constructions Materials*, pages 99–101. E & FN SPON, 1994.
- [31] G. Ruiz, M. Elices, and J. Planas. Experimental study of fracture of lightly reinforced concrete beams. *Materials and Structures*, 31, 1998, 683–691.
- [32] G. Ruiz and J. R. Carmona. Experimental study on the influence of the shape of the cross-section and of the rebar arrangement on the fracture of lightly reinforced beams. *Materials and Structures*, 39, 2006, 343–352.
- [33] J. G. M. van Mier. *Strain-softening of Concrete Under Multiaxial Loading Conditions*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 1984.
- [34] A. Hillerborg. Fracture mechanics concepts applied to moment capacity and rotational capacity of reinforced concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 35, 1990, 233–240.
- [35] M. Sargin. *Stress-strain relationship for concrete and the analysis of reinforced concrete sections*. Dept. of Civil Engineering, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1971.
- [36] S. Popovics. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5), 1973, 583–599.
- [37] M. P. Collins, D. Mitchell, and J. MacGregor. Structural design consideration for high strength concrete. *Concrete International*, 15 (5), 1993, 27–34.
- [38] Z. P. Bažant and Y. W. Kwon. Failure of slender and stocky reinforced concrete columns: test of size effect. *Materials and Structures*, 27, 1994, 79–90.